UEBER

HYPERBOLISCHE BAHNEN

HELLER METEORE.

Fortsetzung zu: „Ueber die Bahnen der am 11. December 1852 und am 3. December 1861 in Deutschland beobachteten hellen Meteore". Halle 1886.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

KÖNIGL. FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

BOLESLAUS BUSZCZYŃSKI

Assistenten der k. u. k. Sternwarte zu Krakau.

THORN 1890.

Druck und Verlag von J. Buszczyński.

SEINEN

HOCHVEREHRTEN LEHRERN

HOCHACHTUNGSVOLLST

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0129

In der neuesten Zeit hat die Rechnung gezeigt, dass die meistens vereinzelt mit unserer Erde in Berührung kommenden hellen Meteore fast ausschliesslich in hyperbolischen Bahnen sich um die Sonne bewegen, woraus gefolgert werden müsste, dass diese Körper aus den Fixsternräumen in unser System gelangen. Uebereinstimmend hiermit stehen auch die Elemente dreier von mir gerechneten hellen Meteore.*)

Andererseits sind die Erscheinungen bei hellen Meteoren denen bei Sternschnuppenfällen, welche periodisch auftreten, so ähnlich, dass es schwierig ist, eine Grenze zu ziehen zwischen beiden Erscheinungen.

Der gegenwärtige Standpunkt der meteorischen Astronomie ist nicht im Stande zu entscheiden, welche von den beiden Möglichkeiten sich am meisten der Wahrheit nähert. Sobald indes eine periodische Wiederkehr von Meteor-Erscheinungen nachgewiesen ist oder angenommen wird, sei es im Zusammenhange mit bekannten periodischen Kometen oder nicht, so können die Bahnen dieser Meteore

---

*) Buszczyński: Ueber die Bahnen der am 11. Dezember 1852 und am 3. Dezember 1861 in Deutschland beobachteten hellen Meteore, Halle 1886; Astronomische Nachrichten Nr. 2752 Jahr 1886 S. 263.

immer nur Ellipsen sein, und die bei den genauer berechneten hellen Meteoren gefundenen Hyperbeln weisen diesen Körpern entweder eine besondere Stellung unter den übrigen an, wie dies in meiner oben erwähnten Abhandlung erörtert ist, oder es wirken in diesem Falle noch besondere bisher unbekannte Ursachen auf die Grundlagen der Berechnung ein. Was zu Gunsten der einen oder andern Ansicht gesagt werden kann, findet man in Schiaparelli's schönem Werke *) über die Theorie der Sternschnuppen. S. 217 u. folg.

Berücksichtigt man, dass die Beobachtungen der hellen Meteore grösstenteils von Beobachtern herrühren, denen es nicht leicht ist genau die Zeitdauer der Erscheinung zu verzeichnen, dass ferner diese Zeitdauer gerade ein Mass für die Geschwindigkeit des Meteors liefert, welche in hohem Grade auf die Grösse der Elemente Einfluss hat, so halte ich es für eine lohnende Aufgabe den Einfluss zu ermitteln, welchen etwaige Fehler in der Bestimmung der Zeitdauer ausüben können auf die Koordinaten des Radiationspunktes, ferner auf die Elemente der Meteorbahn, ganz besonders aber auf die Excentricität.

In dieser Absicht habe ich die Rechnung durchgeführt für zwei helle Dezember-Meteore: 1) für das Dezember-Meteor von 1852, wenn sich die Geschwindigkeit von 4 bis 10 geogr. Meilen in 1 Sekunde ändert, sowie 2) für das Dezember-Meteor 1861, wenn sich die Geschwindigkeit von 4 bis 11 geogr. Meilen in einer Sekunde ändert. Die Rechnung ergab die folgenden Resultate:

*) M. V. Schiaparelli, Note e reflessioni intorno alla teoria astronomica delle stelle cadenti, Firenze 1867. Deutsche Ausgabe von Boguslawski.

1) für das Dezember-Meteor 1852:

Tabelle I.

	4 geogr. M.	5 g. M.	6 g. M.	7 g. M.	8 g. M.	9 g. M.	10 g. M.
π	66°13.'0	67°8.'9	67°43.'0	67°55.'7	68°6.'7	68°25.'8	68°32.'8
i	42°0.'0	47°37.'7	52°7.'3	55°38.'2	58°31.'1	60°52.'4	62°51.'6
log q	9.9867	9.9864	9.9864	9.9867	9.9862	9.9861	9.9855
log a	0.8489_n	0.4660_n	9.8194_n	9.6240_n	9.4710_n	9.3472_n	9.2408_n
e	1.1374	1.7400	2.4690	3.3067	4.2760	5.3525	6.5700
δ	97°8.'9	97°6.'3	98°29.'9	99°0.'2	99°13.'1	99°27.'5	99°38.'3

2) für das Dezember-Meteor 1861:

Tabelle II.

	4 geogr. M.	5 g. M.	7 g. M.	9 g. M.	11 g. M.
π	112°38.'6	110°47.'1	108°51.'4	107°28.'5	107°31.'4
i	34°4.'5	39°6.'5	46°31.'8	51°40.'5	55°22.'0
log q	9.9296	9.9257	9.9203	9.9168	9.9143
log a	0.5086	0.0135^n	9.5739_n	9.3128_n	9.1206_n
e	1.2635	1.8167	3.220	5.018	7.220
δ	67°0.'8	64°32.'0	61°20.'7	59°28'	58°27'

worin π die Länge des Perihels
i die Neigung der Meteorbahn gegen die Ekliptik
q die Periheldistanz
a die halbe grosse Axe
e die Excentricität der Hyperbel
δ den Richtungswinkel des Meteors bedeutet d. i. denjenigen Winkel, welchen die Meteorbahn oder besser die Tangente zu dieser Bahn mit dem Radius-Vektor (Sonne-Meteor) bildet.

Aus diesen Tabellen ist deutlich zu ersehen, wie grossen Aenderungen die Elemente unterliegen, wenn eine Aenderung in der Geschwindigkeit angenommen wird. Jedoch ist aus diesen durch lange Rechnungen erhaltenen Tabellen nicht ersichtlich, auf welche Weise eine kleine Aenderung der Geschwindigkeit auf die Aenderung der Elemente einwirkt.

Diese Abhängigkeits-Beziehungen durch mathematische Formeln auszudrücken ist das Hauptziel dieser Arbeit.

Die Aufgabe selbst zerfällt in die zwei folgenden Abschnitte:

I. **Die Bestimmung der Abhängigkeit der Koordinaten des wahren Radiationspunktes von der Geschwindigkeit des Meteors.**

II. **Darstellung der Differentialgleichungen, in welchen die Abhängigkeit der Elementenänderungen durch die Aenderungen der Geschwindigkeit ausgedrückt ist.**

Es könnte noch ferner die Frage in Betracht gezogen werden, wie sich die Lage des wahren Radiationspunktes ändert, wenn der scheinbare Radiationspunkt um eine kleine Grösse variirt und hieraus die weitere Aufgabe entstehen: Aus den Aenderungen des wahren Radiationspunktes diejenigen des Neigungswinkels und des Richtungs-

winkels zu ermitteln. Die Formeln hierfür sind indes sehr komplicirt und gewähren daher keine praktisch brauchbaren Resultate. Man gelangt in diesem Falle auf direktem Wege schneller zum Ziel.

Ehe ich zur Auflösung der beiden oben gestellten Aufgaben gehe, beginne ich mit einigen Vorbemerkungen, auf welche sich die weiteren Ausführungen stützen sollen.

§ 1.

Das Meteor, von dem wahren Radiationspunkt R kommend, bewege sich nach Fig I. in der Richtung RBC.

AT sei die Richtung der Erdbewegung, und, während

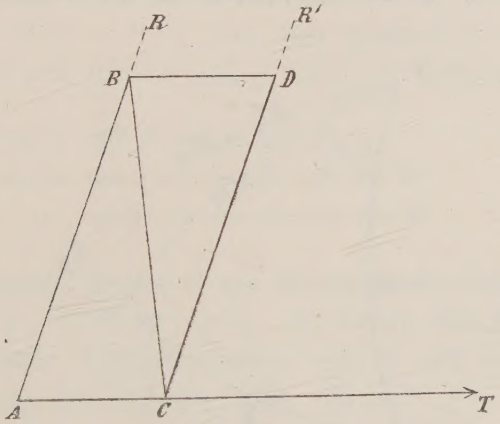

Fig. I.

das Meteor den Weg von B nach C durchlaufe, durcheile die Erde die Strecke AC, so dass beide Körper zugleich in C ankommen. In Folge der gleichzeitigen Erd- und

Meteorbewegung sehen wir das Meteor in einer zu AB parallelen Richtung, somit scheinbar aus R′ kommend. Der wahre und scheinbare Radiationspunkt liegen mit der Richtung ACT der Erdbewegung in einer Ebene; diese Ebene ist gegeben durch die Richtung CT und durch die Richtung nach R′, welche beobachtet ist. Die Richtungsveränderung d. h. der Winkel RCR′ lässt sich aus dem Dreieck ABC oder BCD bestimmen. Es ist:

$$\sin RCR' = \frac{AC}{BC} \sin R'CT.$$

Wenn man sich die Richtungen CT, CR, CR′ auf die Kugelfläche übertragen denkt, so liegen die drei Punkte TR′R auf der Himmelskugel in einem grössten Kreise. Ist in beigefügter Fig. II. T der Punkt, nach dem die Erde hinstrebt, E der Ekliptikpol, R′ der scheinbare, R der

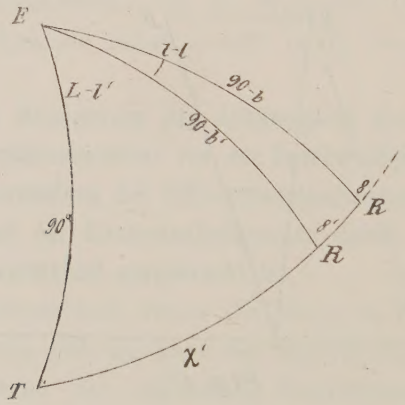

Fig. II.

wahre Radiationspunkt und ist der Bogen TR=χ, TR'=χ', so ist:

$$\sin(\chi-\chi') = \frac{AC}{BC} \sin\chi$$

oder:

$$\sin(\chi-\chi') = \frac{c_0}{c} \sin\chi'$$

$$1.) \quad \sin(\chi-\chi') = \varkappa \sin\chi'$$

wenn $\varkappa = \frac{c_0}{c}$ bedeutet und c_0 die Erdgeschwindigkeit, c dagegen die absolute Meteorgeschwindigkeit bedeutet.

Es habe nun T die Länge L, R die Länge l die Breite b, R' die Länge l' die Breite b' und bezeichnet man den Aussenwinkel bei R mit γ, den bei R' mit γ', so ist die Poldistanz ER = 90 −b und ER' = 90−b'; die Winkel am Pol sind die Unterschiede der Längen also ∠ TER' = L−l', ∠ RER' = l'−l. Aus dem Quadrantendreieck ER'T ergeben sich somit γ' und χ' nach den Formeln:

$$2.) \begin{cases} \sin\gamma' \sin\chi' = \sin(L-l') \\ \cos\gamma' \sin\chi' = \cos(L-l') \sin b' \\ \cos\chi' = \cos(L-l') \cos b' \end{cases}$$

worin rechterseits l' und b' aus Beobachtungen bekannt sind und L = ☉ − 90° ist*). Die Länge und Breite (l, b) des wahren Radiationspunktes ergiebt sich sodann durch Auflösung des Dreiecks ERR'. Es ist:

*) Der genauere Werth für L ist $L = \odot - 90° + 57.'6 \sin(\odot - \pi)$, $\pi = 100° 52.'2 + 1.'028$ (t − 1880,0). Cf. Lehmann-Filhès, Die Bestimmung von Meteorbahnen p. 8. Berlin.

$$3.)\quad \left\{\begin{aligned} \sin b &= \sin b' \cos(\chi - \chi') \\ &\quad + \cos b' \sin(\chi - \chi') \cos \gamma' \\ \cos(l' - l) \cos b &= \cos b' \cos(\chi - \chi') \\ &\quad - \sin b' \sin(\chi - \chi') \cos \gamma' \\ \sin(l' - l) \cos b &= \sin(\chi - \chi') \sin \gamma' \end{aligned}\right.$$

Aus dem Dreieck ABC (Fig. I.) folgt:

$$AC : AB = \sin RCR' : \sin RCT \qquad \text{oder}$$

$$\sin RCR' = \frac{AC}{AB} \sin RCT.$$

Setzt man $\frac{AC}{AB} = \frac{c_0}{c'} = \varkappa'$ (worin c' die scheinbare Meteorgeschwindigkeit sei), da ferner nach den Bezeichnungen des sphärischen Dreiecks $\angle RCR' = \chi - \chi'$ und $\angle RCT = \chi$, so geht die obige Gleichung über in:

$$4.)\quad \sin(\chi - \chi') = \varkappa' \sin \chi \qquad \text{oder}$$

$$5.)\quad \operatorname{tg} \chi = \frac{\sin \chi'}{\cos \chi' - \varkappa'}$$

Aus den Gleichungen 1.) und 4.) folgt sodann:

$$\varkappa \sin \chi' = \varkappa' \sin \chi \qquad \text{oder:}$$

$$\frac{c_0}{c} \sin \chi' = \frac{c_0}{c'} \sin \chi \qquad \text{oder:}$$

$$6.)\quad c = \frac{c' \sin \chi'}{\sin \chi}$$

Diese Gleichung gestattet uns die absolute Geschwindigkeit (c) des Meteors aus der scheinbaren (c') berechnen.

§ 2.

Ich gehe nun über zur Bestimmung der Lage der Ebene der Meteorbahn im Raume, d. i. der Knotenlänge Ω, der Neigung i und des Richtungswinkels δ.

Um den Knoten und die Neigung der Meteorbahn zu

bestimmen, ist es nöthig zu unterscheiden, ob es der aufsteigende oder niedersteigende Knoten ist, in dem das Meteor sich befindet. Dies wird durch die Breite (b) des Radiationspunktes bestimmt. Ist diese südlich, also b negativ, so ist es der aufsteigende Knoten ☊, und umgekehrt. Ist die Breite des Radiationspunktes b negativ, befindet sich also das Meteor im aufsteigenden Knoten, dann sieht man die Sonne von der Erde aus in einer Richtung, die gerade auf den niedersteigenden Knoten zeigt, also ☋ = ☉; hieraus folgt, dass die Richtung um 180° verschieden ist vom aufsteigenden Knoten, also ☊ = 180° + ☉. Ist b positiv, dann ist ☊ = ☉ und ☋ = 180 + ☉. Es ist somit die Knotenlänge gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} ☊ &= ☉ \\ ☋ &= 180^\circ + ☉ \end{aligned}\right\} \text{wenn b positiv.}$$

$$\left.\begin{aligned} ☊ &= 180^\circ + ☉ \\ ☋ &= ☉ \end{aligned}\right\} \text{wenn b negativ.}$$

Der dem Radiationspunkt entgegengesetzte Punkt, nach dem das Meteor zu streben scheint, der Direktionspunkt, hat die Länge 180° + l und die Breite — b.

Fig. III.

Wenn in S die Sonne, in M das Meteor ist, also SM der Radius Vektor der Bahn ist und MN die Richtung, nach der das Meteor zustrebt, so ist ∠ SMN der Richtungswinkel = δ. Denkt man sich die beiden Richtungen SM und MN auf die Himmelskugel übertragen und einen grössten Kreis gezogen, in dem die Sonne S sich befindet, so sei D die Richtung MN und S die von MS. Es stellt

Ekliptik.

Fig. IV.

sich daher δ als der Kreisbogen SD dar. Fällt man von D auf die Ekliptik eine Senkrechte DD′, so ist diese die Breite von D. SD′ ist der Längenunterschied der Sonne und des Direktionspunktes D also:
SD′ = 180° + ☉ — l, wenn das Meteor rechtläufig ist;
SD′ = 180° + l — ☉, wenn das Meteor rückläufig ist.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck SD′D ergeben sich nun zur Bestimmung von i und δ die folgenden Formeln:

$$7.)\quad \begin{cases} \cos\delta = -\cos b\cos(l-\odot) \\ \cos i\sin\delta = +\cos b\sin(l-\odot) \\ \sin i\sin\delta = \begin{matrix}-\\+\end{matrix}\sin b \begin{cases} - \text{ für } ♌ \\ + \text{ für } ♒ \end{cases} \end{cases}$$

Findet sich hieraus $i < 90^\circ$ so ist das Meteor rechtläufig und ist $i > 90^\circ$ so ist es rückläufig.

§ 3.

Bestimmung der Excentricität e des Kegelschnitts, der Länge des Perihels π, der Periheldistanz q, der halben grossen Axe a und der Durchgangszeit durch's Perihel T.

Da die wahre Anomalie v*) $= u - \omega$ ist, so kann dieselbe, wenn c, δ und r bekannt, zusammen mit e aus den folgenden Formeln der Theorischen Astronomie **) berechnet werden:

$$e \sin (u - \omega) = - \frac{c^2}{k^2} \cdot r \cdot \sin \delta \cos \delta$$

$$e \cos (u - \omega) = + \frac{c^2}{k^2} \cdot r \cdot \sin^2 \delta - 1$$

worin k die Gauss'sche Constante ($\log k = 8.23558144$) und r den Radius-Vektor bedeutet.

Wenden wir diese Formeln auf unsern Fall an, so wird für den Augenblick der Begegnung mit der Ekliptik $u = o$, $r = R$ (Entfernung der Erde von der Sonne) und die Formeln gehen über in:

8.)
$$\left.\begin{array}{l} e \cdot \sin \omega = \mp \frac{c^2}{k^2} \cdot R \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta \\ e \cdot \cos \omega = \mp \left\{ \frac{c^2}{k^2} \cdot R \cdot \sin^2 \delta - 1 \right\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} + \text{ bei } \Omega \\ - \text{ bei } \Im \end{array}$$

Die Länge des Perihels π und die wahre Anomalie v ergeben sich aus:

---

*) Die Bezeichnung ist die allgemein gebräuchliche $u = \omega + v = \pi - \Omega + v =$ Argument der Breite.

**) Watson: Theoretical Astronomy p. 333 u. folg.

$$\pi = \Omega + \omega$$
$$v = -\omega \quad \text{für } \Omega$$
$$v = 180^0 - \omega \quad \text{für } \mathfrak{V}.$$

Aus der Polargleichung für die Kegelschnitte

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

findet man den halben Parameter aus:

9.) $$p = R\,(1 \pm e \cos \omega)$$

Ist p bestimmt, so findet man die halbe grosse Axe aus:

10.) $$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

oder auch mit Benutzung von c und δ:

11.) $$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{c^2}{k^2}$$

$$q = \frac{p}{1 + e}; \quad \log a = \log \frac{p}{1 - e^2}.$$

§ 4.

Da die Excentricität e bei hellen Meteoren grösser als die Einheit ausfällt, wie dies am Anfange hervorgehoben wurde, die Bahn des Meteors somit eine Hyperbel ist, so stelle ich noch diejenigen Gleichungen hier zusammen, welche zur Bestimmung des Ortes der Meteore in der Hyperbel dienen und die Formel zur Bestimmung des Durchgangs des Meteors durch das Perihel.

In der Hyperbel werden φ und ε imaginaire Grössen und man muss, um solche zu vermeiden, andere Hilfsgrössen einführen. Wird $\frac{1}{e} = \cos \varphi$ gesetzt, so ist der Radius-Vektor:

12.) $$r = \frac{p \cdot \cos \psi}{2 \cdot \cos \tfrac{1}{2} (v - \psi) \cos \tfrac{1}{2} (v + \psi)}$$

Setzen wir ferner:

13.) $$\frac{\cos \tfrac{1}{2} (v - \psi)}{\cos \tfrac{1}{2} (v + \psi)} = u$$

so wird $u = 1$ im Perihel; es wächst in infinitum, während v sich dem Werthe $180^0 - \psi$ nähert, dagegen nähert sich u der Null, wenn v zu seinem andern Grenzwerthe $-(180^0 - \psi)$ übergeht. Dieser Quotient u kann sehr bequem in der Hyperbel als Hilfsgrösse angenommen werden und es kann an seiner Stelle ein Winkel F fungiren, so dass:

14.) $$\text{tang } \tfrac{1}{2} F = \text{tang } \tfrac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}}$$

Berücksichtigt man, dass in der Hyperbel die Halbaxe a negativ ist, so dass $p = a (e^2 - 1)$, so ist:

15.) $$a = p \cdot \text{cotg } \psi^2$$

und die Periheldistanz wird:

16.) $$q = a (e - 1).$$

Aus den Gleichungen 13. und 14. folgen nun die folgenden Relationen:

17.) $$\text{tang } \tfrac{1}{2} F = \text{tang } \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}} =$$

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2} v \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2} \psi = \frac{u - 1}{u + 1}$$

18.) $$u = \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} F}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} F} = \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} F)$$

19.) $$\frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{1 + \cos \psi \cdot \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cdot \cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{r(e + \cos v)}{p}$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt weiter:

$$\frac{1 \mp \cos F}{\cos F} = \frac{r(e \mp 1) \cdot (1 \mp \cos v)}{p}$$

Nehmen wir einmal die oberen, das andere Mal die unteren Zeichen und berücksichtigt man, dass $p = a(e^2 - 1) = a(e - 1)(e + 1)$ so erhalten wir, nachdem noch die Quadratwurzel gezogen:

20.)
$$\sqrt{r} \cdot \sin \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{a(e + 1)}}{\sqrt{\cos F}} \cdot \sin \frac{1}{2} F$$
$$\sqrt{r} \cdot \cos \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{a(e - 1)}}{\sqrt{\cos F}} \cdot \cos \frac{1}{2} F$$

woraus sich durch Multiplication ergiebt:

21.) $$r \cdot \sin v = p \cdot \operatorname{cotg} \psi \cdot \operatorname{tg} F = a \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} F = \frac{1}{2} p \operatorname{cotg} \psi \left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \left(u - \frac{1}{u}\right)$$

Durch Verbinden der Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \text{ oder } r \cos v = \frac{p \cdot \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{a\,(e^2 - 1) \cos v}{e \cos v + 1} =$$

$$= a \cdot \frac{e^2 \cos v - \cos v}{e \cos v + 1} = a \left\{ e - \frac{(e + \cos v)}{(1 + e \cos v)} \right\}$$

mit der Gleichung 19 erhalten wir:

$$22.) \quad r \cdot \cos v = a \left(e - \frac{1}{\cos F}\right) = \tfrac{1}{2}\, a \left(2\, e - u - \frac{1}{u}\right)$$

und aus Gleichung 21 und 22:

$$23.) \quad r = a \left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\, a \left\{ e \left(u + \frac{1}{u}\right) - 2 \right\}$$

Durch Differentiation der Gleichung 18, wenn man ψ als konstant annimmt, folgt:

$$\frac{du}{u} = \tfrac{1}{2} \left\{ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (v + \psi) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (v - \psi) \right\} d\, v =$$

$$= \frac{r \cdot \operatorname{tg} \psi}{p} \cdot d\, v$$

oder:

$$r^2\, d\, v = \frac{p \cdot r}{u \cdot \operatorname{tg} \psi}\, du.$$

und hierin für r seinen Werth aus 23. und für p aus 15. eingesetzt, resultirt:

$$r^2\, d\, v = a^2 \operatorname{tg} \psi \left\{ \tfrac{1}{2}\, e \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{u} \right\} du$$

Integrirt man hierauf so, dass das Integral im Perihel verschwindet so folgt:

$$\int r^2 \, d\, v = a^2 \, tg \, \varphi \left\{ \tfrac{1}{2} \, e \, (u - \frac{1}{u}) - \log u \right\} =$$

$$= K \, (t - T) \sqrt{p} = K \, (t - T) \cdot tg \, \varphi \cdot \sqrt{a}.$$

Hier ist der Logarithmus ein hyperbolischer, will man daher Logarithmen aus dem Brigg'schen System, dessen Modulus $M = 0{\cdot}43429\ldots$ so multipliciren wir die ganze Gleichung mit M und erhalten:

$$\tfrac{1}{2} \, M \cdot e \cdot \frac{u^2 - 1}{u} - \log u = \frac{M \cdot K \cdot (t - T)}{a^{3/2}}$$

oder indem wir unsern Winkel F einführen:

$$24.) \quad M \cdot e \cdot tg \, F - \log tg \, (45^\circ + \tfrac{1}{2} \, F) = \frac{M \cdot K \cdot (t - T)}{a^{3/2}}$$

Diese letzte Gleichung giebt uns t — T wenn a, e und F bekannt sind; a und e sind schon bestimmt; wir wissen ferner, dass wenn $v = -\omega$ (oder $v = 180^\circ - \omega$) so ist r = R, wir können somit den Winkel F berechnen sei es nach Gleichungen 20 sei es direkt aus Gleichung 14, welche in diesem Falle übergeht in:

$$tang \, \tfrac{1}{2} \, F = - \, tang \, \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}}$$

und um sicher zu sein, in welchem Quadranten der Winkel F zu nehmen ist, muss nach Gleichung 19. berechnet werden:

$$\frac{1}{\cos F} = \frac{e \cdot \cos \omega}{1 + e \cos \omega}$$

wodurch die Unsicherheit beseitigt wird.

§ 5.

Ich gehe nunmehr zu der Auflösung der in der Einleitung hervorgehobenen Aufgaben.

Es war in § 1 S. 12:

$$\frac{c^0}{c'} = \varkappa'$$

somit durch Differentiation nach c':

25.) $$d\,\varkappa' = -\frac{c^0}{c'^2} \cdot d\,c' \cdot$$

Ferner war nach Gleichung 5):

$$\text{tang}\,\chi = \frac{\sin \chi'}{\cos \chi' - \varkappa'}$$

Dieses nach χ und $\varkappa'$ differentiirt und für $d\varkappa'$ seinen obigen Werth eingesetzt, erhalten wir nach Einführung der absoluten Geschwindigkeit:

26.) $$d\,\chi = -\frac{\varkappa'}{c} \cdot \sin \chi \cdot d\,c'.$$

Nun ist die absolute Geschwindigkeit (Gleichung 6):

$$c = \frac{c' \cdot \sin \chi'}{\sin \chi}$$

somit durch Differentiation:

$$d\,c = \frac{c}{c'}\,d\,c' - \frac{c \cdot \cos\chi}{\sin\chi}\,d\,\chi$$

Substituirt man hierin für $d\chi$ seinen obigen Werth 26, so erhalte ich:

$$d\,c = \frac{c}{c'} \cdot d\,c' + x' \cdot \cos\chi \cdot d\,c' \text{ oder:}$$

27.) $$d\,c = \left\{ \frac{c}{c'} + x' \cdot \cos\chi' \right\} d\,c'$$

eine Gleichung, welche die Abhängigkeit der absoluten Geschwindigkeit von der scheinbaren anzeigt.

§ 6.

Ich gehe nunmehr zum ersten Teil meiner Aufgabe über: I. **Die Bestimmung der Abhängigkeit der Koordinaten des wahren Radiationspunktes von der Geschwindigkeit des Meteors.**

Differentiirt man die erste der Gleichungen 3.) (S. 12).

$$\sin b = \sin b' \cos(\chi - \chi') + \cos b' \sin(\chi - \chi') \cos\gamma$$

indem man b', χ' und γ' ungeändert lässt, so wird:

$$\cos b\, d\, b = \cos b' \cos(\chi - \chi') \cos\gamma'\, d\,\chi - \\ - \sin b' \sin(\chi - \chi')\, d\,\chi,$$

da jedoch nach Fig. II. S. 10:

$$\cos b' \cos(\chi - \chi') \cos\gamma' - \sin b' \sin(\chi - \chi') = \cos b \cdot \cos\gamma$$

ist, so folgt:

$$\cos b\, d\, b = \cos b \cdot \cos\gamma\, d\,\chi \qquad \text{oder:}$$

28.) $$d\,b = \cos\gamma \cdot d\,\chi.$$

Differentiirt man ferner die dritte der Gleichungen 3.):

$$\sin(l' - l) \cdot \cos b = \sin(\chi - \chi') \sin\gamma'$$

und lässt man l', γ' und χ' unverändert, so wird:

$$\cos(\chi - \chi') \sin\gamma' \, d\,\chi = -\sin(l' - l) \sin b \, d\,b - \\ - \cos b \cos(l' - l)\, d\,l;$$

hierin gesetzt für:

$$\sin\gamma' = \frac{\sin(l' - l) \cdot \cos b}{\sin(\chi - \chi')} \qquad \text{und}$$

$$d\,b = \cos\gamma \, d\,\chi$$

so erhalte ich:

$$\cos b \cdot \cos(l' - l)\, d\,l = -\frac{\cos(\chi - \chi') \sin(l' - l) \cos b}{\sin(\chi - \chi')} d\,\chi - \\ - \sin(l' - l) \sin b \cos\gamma \, d\,\chi$$

oder:

$$d\,l = -\operatorname{tg}(l' - l) \left\{ \operatorname{cotg}(\chi - \chi') + \operatorname{tg} b \cos\gamma \right\} d\chi$$

Aus demselben Dreieck Fig. II. haben wir noch:

$$\cos(\chi - \chi') \cos b + \sin(\chi - \chi') \sin b \cos\gamma = \cos b' \cos(l' - l),$$

es geht somit die obige Formel für dl über in:

$$dl = -\operatorname{tg}(l' - l) \cdot \frac{\cos b' \cos(l' - l)}{\sin(\chi - \chi') \cos b} \cdot d\chi$$

$$= - \frac{\sin (l' - l) \cdot \cos b'}{\sin (\chi - \chi') \cos b} \cdot \quad d \chi$$

Da aber:

$$\sin (l' - l) \cos b' = \sin (\chi - \chi') \sin \gamma$$

so folgt:

$$29.) \qquad d l = - \frac{\sin \gamma}{\cos b} \cdot d \chi$$

Die Abhängigkeit von d χ von d c' ist aus dem Vorhergehenden schon bekannt, folglich können d b und d l mit Hilfe von d c' folgendermassen dargestellt werden:

$$30.) \begin{cases} d l = \frac{\varkappa'}{c} \cdot \frac{\sin \chi \cdot \sin \gamma}{\cos b} \cdot d c' \\ d b = - \frac{\varkappa'}{c} \sin \chi \cdot \cos \gamma \cdot d c'. \end{cases}$$

§ 7.

II. **Darstellung der differentialen Aenderungen der Elemente durch diejenigen der Geschwindigkeit.**

a.) Die Aenderungen von δ und i finden wir, indem wir die zweite und dritte Gleichung 7.) differentiiren:

$$\cos i \cos \delta \, d \delta - \sin i \sin \delta \, d i =$$
$$= \cos b \cos (l - \odot) \, d l - \sin b \sin (l - \odot) \, d b$$

$$\sin i \cos \delta \, d \delta + \cos i \sin \delta \, d i = \mp \cos b \, d b.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit cos i die zweite mit sin i und addiren, ferner multipliciren wir

die erste mit — sin i die zweite mit cos i und addiren, so erhalten wir:

$$\cos\delta\ \mathrm{d}\,\delta = -\cos\delta\cos\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l} - \\ -(\sin\mathrm{b}\cos\mathrm{i}\sin(\mathrm{l}-\odot)\pm\cos\mathrm{b}\sin\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}$$

oder a.) $$\mathrm{d}\,\delta = -\cos\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l} - \\ -\frac{\sin\mathrm{b}\cos\mathrm{i}\sin(\mathrm{l}-\odot)-\cos\mathrm{b}\sin\mathrm{i}}{\cos\delta}\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}$$

$$\sin\delta\ \mathrm{d}\,\mathrm{i} = +\sin\mathrm{i}\cos\delta\ \mathrm{d}\,\mathrm{l} + \\ +(\sin\mathrm{b}\sin\mathrm{i}\sin(\mathrm{l}-\odot)\mp\cos\mathrm{b}\cos\mathrm{i})\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}$$

oder b.) $$\mathrm{d}\,\mathrm{i} = \operatorname{cotg}\delta\sin\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l} + \\ +\frac{\sin\mathrm{b}\sin\mathrm{i}\sin(\mathrm{l}-\odot)\mp\cos\mathrm{b}\cos\mathrm{i}}{\sin\delta}\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}$$

Ersetzt man:

$$\left.\begin{aligned}\sin\mathrm{b}\cdot\sin(\mathrm{l}-\odot) &= \mathrm{d}\sin\mathrm{D}\\ \cos\mathrm{b} &= \mathrm{d}\cos\mathrm{D}\end{aligned}\right\}$$

somit $\operatorname{tang}\mathrm{D} = \operatorname{tang}\mathrm{b}\cdot\sin(\mathrm{l}-\odot)$

$$\mathrm{d} = \frac{\cos\mathrm{b}}{\cos\mathrm{D}}$$

so erhalten wir:

31.)
$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\delta = -\cos\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l} - \dfrac{\mathrm{d}\sin(\mathrm{D}\pm\mathrm{i})}{\cos\delta}\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}\\ \mathrm{d}\,\mathrm{i} = \operatorname{cotg}\delta\sin\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l}\mp\dfrac{\mathrm{d}\cos(\mathrm{D}\pm\mathrm{i})}{\sin\delta}\,\mathrm{d}\,\mathrm{b}\end{cases}$$

Da d l und d b durch die Gleichungen 30.) in Beziehung

gebracht worden sind mit dc' so haben wir hiermit die Abhängigkeit von δ und i von c'. —

β.) Die Aenderungen von e und ω finden wir, indem wir die Gleichungen 8.) differentiiren:

$$e \sin \omega = \pm \frac{c^2}{K^2} R \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta$$

$$e \cos \omega = \pm \left\{ \frac{c^2}{K^2} R \sin^2 \delta - 1 \right\}$$

Die Differentiation ergiebt:

$$e \cos \omega \, d\omega + \sin \omega \, de = \\ = \frac{2e}{c} \sin \omega \, dc \pm \frac{c^2 R}{K^2} \cos 2\delta \, d\delta$$

$$- e \sin \omega \, d\omega + \cos \omega \, de = \\ \frac{2 (e \cos \omega \pm 1)}{c} dc \pm \frac{c^2 R}{K^2} \sin 2\delta \, d\delta$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit sin ω, die zweite mit cos ω und addiren, ferner multipliciren wir die erste Gleichung mit cos ω, die zweite mit — sin ω und addiren, so erhält man nach mehrfachen Vereinfachungen:

32.)
$$\begin{cases} de = \frac{2}{c} (e \pm \cos \omega) \, dc \pm \frac{c^2}{K^2} . R \cdot \sin (\omega + 2\delta) \, d\delta \\ d\omega = \frac{2}{e \cdot c} \cdot \mp \sin \omega \, dc \pm \frac{c^2}{K^2} \cdot \frac{R}{e} . \cos (\omega + 2\delta) \, d\delta \end{cases}$$

Wollen wir die letzteren beiden Grössen d e und d ω nur durch d c' ausgedrückt haben, so differentiiren wir die erste der Gleichungen 7.):

$$\cos \delta = - \cos b \cos (l - \odot)$$

was uns giebt:

$$- \sin \delta \, d \delta = \sin b \cos (l - \odot) \, d b + \cos b \, . \sin (l - \odot) \, d l$$

woraus folgt:

$$d \delta = - \frac{\sin b \cos (l - \odot)}{\sin \delta} d b - \frac{\cos b \sin (l - \odot)}{\sin \delta} d l$$

Setzen wir hierin für d b und d l die bereits gefundenen Werthe ein, so wird:

$$d \delta = - \frac{\varkappa'}{c} \cdot \frac{\sin \chi \cdot \sin \gamma \cdot \sin (l - \odot)}{\sin \delta} d c' +$$
$$+ \frac{\varkappa'}{c} \cdot \frac{\sin \chi \cos \gamma \sin b \cos (l - \odot)}{\sin \delta} \cdot d c'$$

oder:

$$d \delta = \frac{\varkappa' \sin \chi}{c \, . \sin \delta} \cdot \{ \cos \gamma \sin b \cos (l - \odot) -$$
$$- \sin \gamma \sin (l - \odot) \} d c'$$

Führen wir hier die folgenden Hilfsgrössen ein:

$$\sin (l - \odot) = a \sin A$$
$$\sin b \cos (l - \odot) = a \cos A$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} (l - \odot)}{\sin b}; \; a = \frac{\sin (l - \odot)}{\sin A}$$

so ergiebt sich:

32.b) $$d \delta = \frac{\varkappa' \sin \chi}{c \cdot \sin \delta} \cdot a \cdot \cos (\gamma + A) \, d c'.$$

Diesen Werth d δ sowie den anfangs gefundenen d c in die Gleichungen 32.) substituirt, erhalten wir für d e und d ω Werthe ausgedrückt durch Aenderungen der Meteor-Geschwindigkeit.

γ.) Um die differentialen Aenderungen des halben Parameters zu erlangen, benutzen wir die Gleichung:

$$p = R\,(1 \pm e \cos \omega)$$

Aus der zweiten Gleichung 8. folgt:

$$1 + e \cos \omega = \frac{c^2}{K^2} \cdot R \sin^2 \delta$$

folglich:

$$p = \frac{c^2}{K^2} \cdot R \cdot \sin^2 \delta$$

und dies differentiirt:

$$d\,p = \frac{R^2 \sin^2 \delta}{K^2} \cdot 2\,c\,d\,c + \frac{c^2}{K^2} \cdot R^2 \sin 2\,\delta\,d\,\delta$$

oder:

$$33.) \qquad d\,p = \frac{2\,p}{c}\,d\,c + \frac{c^2}{K^2} \cdot R^2 \sin 2\,\delta \cdot d\,\delta$$

δ.) Um das Differential der Halbaxe zu erhalten, differentiire ich

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{c^2}{K^2}$$

woraus folgt:

$$\frac{d\,a}{a^2} = \frac{2\,c}{K^2}\,d\,c$$

oder:

34.) $$d\,a = \frac{2\,a^2\,c}{K^2} \cdot d\,c$$

ε.) Die Abhängigkeit der Periheldistanz q finden wir durch Differentiation der Gleichung 16:

$$q = a\,(e - 1)$$

was ergiebt:

35.) $$d\,q = a \cdot d\,e + (e - 1)\,d\,a$$

ζ. Die Abhängigkeit der Grösse π finden wir schliesslich aus der Gleichung:

$$\pi = \Omega + \omega$$

denn es ist:

36.) $$d\,\pi = d\,\omega.$$

Alle diese Gleichungen wandte ich nunmehr an, um die Elementenänderungen der zwei Dezember-Meteore 1852 und 1861 durch eine willkürlich angenommene Variation der Geschwindigkeit auszudrücken. Auf Grund einer Vergleichung der erhaltenen Rechnungsresultate mit den am Anfange zusammengestellten Tabellen I und II konnte ich die Richtigkeit meiner Endgleichungen konstatiren und zugleich erkennen in wie fern die von mir aufgestellten Gleichungen von Nutzen sein können bei dergleichen Untersuchungen. Und so folgt z. B. für das Dezember-Meteor 1852 nach den Gleichungen 27 bis 36 (für $c' = 4$ geogr. Meilen und $d\,c' = 0{\cdot}1$ geogr. Meilen in 1 Sekunde angenommen):

$d\,c = 0.0752$ geogr. Meilen
$d\,l = -\ 13.'09$
$d\,b = +\ 37.'22$
$d\,\delta = +\ 5.'61$
$d\,i = +\ 38.'38$
$d\,e = +\ 0.1272$
$d\,\omega = d\,\pi = +\ 10.'54$
$d\,a = +\ 0.5981.$

Die von mir angegebenen Zahlen zeigen, dass besonders für das erste Meteor die Hyperbel verhältnissmässig wenig ausgeprägt ist, da eine geringe Aenderung der angenommenen Sichtbarkeitsdauer genügt um die Excentricität $e = 1$ zu machen.

In einer Fortsetzung dieser Untersuchungen über Meteorbahnen werde ich mit verschiedenen Annahmen für die Sichtbarkeitsdauer die scheinbare resp. die wahre Geschwindigkeit und den Richtungswinkel und daraus dann a und e rechnen. Hat man über die plausibelsten Werthe von a und e entschieden, so wird es dann erst zweckmässig sein, die übrigen Elemente und die Differential-Aenderungen zu rechnen. Man kann die Entscheidung auch nur von der Geschwindigkeit abhängig machen, d. h. die Berechnung von e sich ersparen, da bereits das Vorzeichen von a, wenn es aus dem Integral der lebendigen Kraft berechnet wird, über den Charakter der Bahn entscheidet. Diese Diskussion indes über die Sicherheit, mit der man die betreffenden Bahnen als hyperbolische aussprechen kann, bedarf einer weiteren besonderen Bearbeitung.

VITA.

Boleslaus Buszczyński natus sum ante diem decimum Cal. Jan. LVIII Posnaniae, patre Josepho matre Francisca de gente Maciejewska. Fidem profiteor catholicam. Primis litterarum elementis in schola publica Posnaniensi imbutus, gymnasium Thoruniense adii. Testimoniis maturitatis instructus, auct. a. LXXIX Universitatem Berolinensem, Lipsiensem, Vratislaviensem petii, ibique studiis astronomicis, mathematicis, physicis, philosophicis incubui. Inde anno LXXXIII Observatorii regii Vratislaviae assistentis munere usque ad LXXXVI functus eram, inde Cracoviam me contuli quo adhoc in Observatorio astronomico imperiali ac regio negotiis meis occupatus sum.

Lectionibus interfui horum virorum ill. in Universitatibus 1. Berolinensi: Bruns, Förster, Helmholtz, Paulsen, Zeller. 2. Lipsiensi: Bruhns, Klein, Mayer, Rohn, Von der Mühl, E. Wiedemann, G. Wiedemann, Zöllner. 3. Vratislaviensi: Auerbach, Cohn, Dilthey, Dorn, Erdmann, Galle, Goeppert, Koerber, Liebisch, Meyer, Partsch, Poleck, Rosanes, Schroeter, Staude, L. Weber, T. Weber.

Seminarii mathem. Vratislaviensis sodalis fui per duo semestria. In specula Lipsiae per duo semestria exercitationibus astronomicis adfui sub auspiciis v. ill. Bruhns.

Omnium praeceptorum meorum memoriam ut grato animo semper prosequar ita gratissima semper et pientissima mente me devinctum esse fatebor vv. ill. Bruhns, Galle, studiorum meorum rectoribus benevolentissimis.